

2024 年广东省数学竞赛初赛试题
(民办本科类, 2024年11月19日)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

一、(本题 30 分, 每小题 6 分) 填空题:

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(\sqrt[3]{3}-1)}$ 的值为 _____.
2. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x}} + 3 \ln x$ 的图像在点 $(1, e)$ 的切线方程为 _____.
3. 函数 $y = x^3 - 2x^2 + x$ 的图像与 x 轴所围成的区域 D 的面积为 _____.
4. $f(x, y) = xy[1 - (x+y)^2]$ 在 $D: x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$ 上的最大值为 _____.
5. 二重积分 $\iint_{[0, \pi]^2} \sin x \cos(x+y) dx dy$ 的值为 _____.

二、(本题 14 分) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1^2 + \sqrt{1+n^2}} + \frac{n}{2^2 + \sqrt{2+n^2}} + \cdots + \frac{n}{n^2 + \sqrt{n+n^2}} \right).$$

三、(本题 14 分) 求微分方程 $xy'' + (2x+2)y' + 2y = e^x$ 的通解.

四、(本题 14 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$ 的收敛半径、收敛区间以及和函数.

五、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有二阶导函数, 并且满足 $f(0) = 0$, $f''(x) > 0 (x > 0)$. 求证: 对任意 $x > 0, y > 0$ 有 $f(x+y) > f(x) + f(y)$.

六、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有的连续的导函数, 且满足 $f(0) = 0$ 和

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)(f'(x))^2 dx.$$

求证: 存在常数 c 使得 $f(x) = cx$.